Granična vrijednost funkcija više promjenljivih. Neprekidnost

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Posmatrajmo funkcije:

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

- Oblast definisanosti funkcija f i g je

$$D = \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$$

- Vrijednost funkcije $f(x,y)$ se približava 1 kada se (x,y) približava $(0,0)$
- Ali, za funkciju $g(x,y)$ nije takva situacija
- Naslućujemo da važi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ ne postoji}$$

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija čiji domen D sadrži tačke iz okoline (a, b).

Definicija

Funkcija $f(x, y)$ ima graničnu vrijednost u tački (a, b) i pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

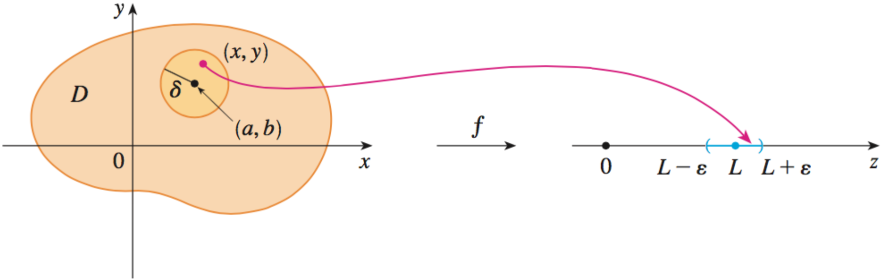
$$\text{ako } (x, y) \in D \text{ i } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ tada } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Drugi zapis:

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x, y) = L$$

ili

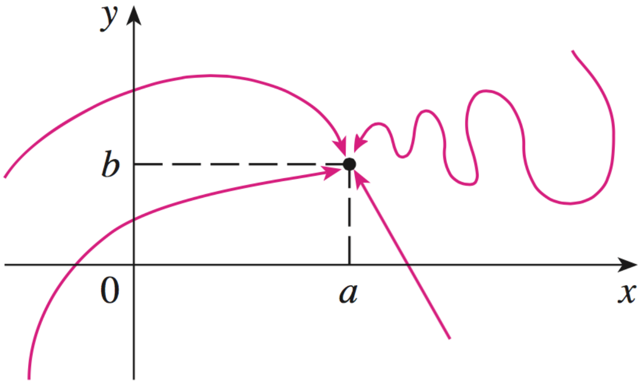
$$f(x, y) \to L \text{ kada } (x, y) \to (a, b)$$



Napomena:

- $|f(x,y) - L|$ predstavlja rastojanje izmedju realnih brojeva $f(x,y)$ i L
- $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ predstavlja rastojanje izmedju tačke (x,y) i tačke (a,b) u $\mathbb{R}^2$

- Kod funkcija jedne realne promjenljive imamo da se x približava tački a samo sa lijeve ili desne strane. Tada smo pisali $x \to a^-$ i $x \to a^+$.
- Kod funkcija dvije prmjenljive sitacija nije tako jednostavna (ima mnogo načina da $(x, y) \to (a, b)$, ponekad i beskonačno mnogo)
- Ako funkcija $f(x, y)$ ima graničnu vrijednost u tački (a, b), razumije se da ima i graničnu vrijednost po svakoj pravoj (krivoj) koja sadrži tačku (a, b), a ima neprazan presjek sa domenom funkcije. Šta više, ove granične vrijednosti istovetne su sa graničnom vrijednosti funkcije $f(x)$ u tački (a, b).
- Prema ovoj primjedbi jasno je da funkcija nema graničnu vrijednost u tački ako po dva različita pravca (po pravoj i krivoj ili po dvije različite krive) kroz datu tačku ima dvije različite granične vrijednosti.



Ako $f(x, y) \to L_1$ kada $(x, y) \to (a, b)$ po krivoj C_1 i $f(x, y) \to L_2$ kada $(x, y) \to (a, b)$ po krivoj C_2 i ako je $L_1 \neq L_2$, tada

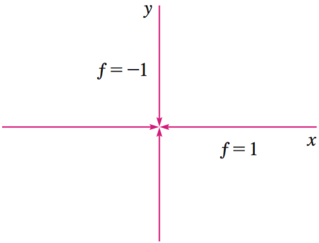
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \quad \text{ne postoji.}$$

Primjer 1: Pokazati da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ne postoji.

Ovdje je $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.



Posmatrajmo duž koordinatnih osa:

$x-$osa: $y = 0$ pa

je $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ za svako $x \neq 0$ i slijedi

$f(x,y) \to 1$ za $(x,y) \to (0,0)$ duž $x-$ ose

$y-$osa: $x = 0$ pa je $f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$

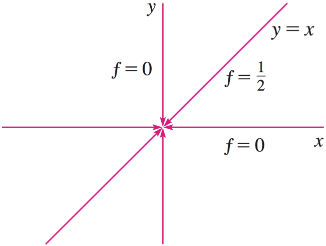
za svako $y \neq 0$ i slijedi

$$f(x,y) \to -1 \text{ za } (x,y) \to (0,0) \text{ duž } y- \text{ ose}$$

Kako f ima 2 različita limesa duž dvije različite prave, zaključujemo da traženi limes ne postoji.

Primjer 2: Da li postoji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}?$$



Ako je $y = 0$, tada $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$, pa

$$f(x,y) \to 0 \text{ za } (x,y) \to (0,0) \text{ duž } x- \text{ ose}$$

Ako je $y = 0$, tada $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$, pa

$$f(x,y) \to 0 \text{ za } (x,y) \to (0,0) \text{ duž } y- \text{ ose}$$

Iako smo dobili da su limesi duz koordinatnih osa isti, ne znači da postoji limes funkcije f. Provjerimo za jos neki pravac, npr. duž prave $y = x$: $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, pa je

$$f(x,y) \to 0 \text{ za } (x,y) \to (0,0) \text{ duž prave } y = x,$$

odakle zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. $\square$

Primjer 3: Da li postoji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}?$$

Neka je $y = mx$, prava koja prolazi kroz koordinatni početak. Tada je

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{1+m^4x^2}$$

pa važi

$$f(x,y) \to 0 \text{ kada } (x,y) \to (0,0) \text{ duž pravih } y = mx.$$

Ako $(x, y) \to (0, 0)$ duž parabole $x = y^2$:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

pa važi

$$f(x, y) \to \frac{1}{2} \text{ kada } (x, y) \to (0, 0) \text{ duž } x = y^2.$$

Dakle,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^4} \text{ ne postoji.}$$

$\square$

Teorema (svojstva)

Pretpostavimo da granične vrijednosti $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ i $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ postoje i da je c realna konstanta. Tada važi:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = c \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$, ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a, \quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b, \quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$

Primjer 4: Naći $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ ako postoji.

U prethodnom primjeru smo vidjeli da može limes duž svake prave da bude isti, ali to nije dovoljno da granična vrijednost postoji. Medjutim, limes duž parabola $y = x^2$ i $x = y^2$ je takodje 0.

Provjeravamo po definiciji da li je $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$?

Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo da nadjemo $\delta > 0$ tako da

$$\text{iz } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ slijedi } \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

Kako je $x^2 \leq x^2 + y^2$ (jer je $y^2 \geq 0$), tada je $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ i

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = \varepsilon$$

Za $\delta = \varepsilon/3$ dobili smo gornju nejednakost i zaključujemo da

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Primjer 5:

Izračunati

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y).$$

Kako je $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ polinomijalna funkcija, ona je neprekidna na $\mathbb{R}^2$ i limes nalazimo direktnom zamjenom:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 11$$

$\square$

Neprekidnost

Neprekidnost funkcija jedne realne promjenljive je bila relativno jednostavno definisana: ako $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ dvije realne promjenljive je **neprekidna** u tački (a, b) ako

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Funkcija f je neprekidna na D ako je neprekidna u svakoj tački skupa D.

Primjer 6: Da li je funkcija $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ neprekidna?

Funkcija f nije definisana u $(0,0)$, pa zbog toga nije ni neprekidna u toj tački.

Kako je f racionalna funkcija, ona je neprekidna na svom domenu koji je

$$D = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}.$$

$\square$

Primjer 7: Neka je

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & ako (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ako (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Iako je g definisano u $(0,0)$, g nije neprekidno jer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

ne postoji. □

Primjer 8: Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & ako (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ako (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funkcija f je neprekidna za svako $(x,y) \neq (0,0)$ jer je racionalna funkcija. U primjeru 4 smo pokazali da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

pa zaključujemo da je funkcija f neprekidna i u tački $(0,0)$, tj. neprekidna je na $\mathbb{R}^2$. $\square$

Funkcije tri ili više promjenljivih

Sve što smo naveli za funkcije dvije promjenljive može se proširiti na funkcije tri ili više promjenljivih.
Oznaka

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$$

znači da vrijednost $f(x,y,z)$ teži L kada tačka (x,y,z) teži (a,b,c).
Kako je rastojanje dvije tačke (x,y,z) i (a,b,c) u $\mathbb{R}^3$ definisano sa $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, precizna definicija glasi: $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ tako da

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z)-L| < \varepsilon.$$

Funkcija f je neprekidna u tački (a,b,c) ako

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c).$$